3 fの連続性より,

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ [\|x-a\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon]$

$f(a)>0$だから$\frac{f(a)}{2}>0$であるので,

$\varepsilon=\frac{f(a)}{2}$とすると,

$\exists \delta>0\ [\|x-a\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\frac{f(a)}{2}]$ $\cdots$ ①

$$|f(x)-f(a)|<\frac{f(a)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(a)}{2}<f(x)-f(a)<\frac{f(a)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3}{2}f(a)$$

①より,

$\exists \delta>0\ [\|x-a\|<\delta \Rightarrow \frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3}{2}f(a)]$

となるから,

ある$\delta>0$で$\|x-a\|<\delta$で$\frac{f(a)}{2}<f(x)$を満たす

ものが存在する. ▨

(問題文が多分ミスってる)

4 f_x, f_yが存在するので, 平均値の定理より, ある$\theta\ (0<\theta<1)$で,

$$f(a+h,b)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b)$$

$$f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=kf_y(a+h,b+\theta k)$$

であるから, この2式を足して,

$$f(a+h,b)-f(a,b)+f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=hf_x(a+\theta h,b)+kf_y(a+h,b+\theta k)$$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b)+kf_y(a+h,b+\theta k) ▨$$