$A \subset \mathbb{R}^N$ の内部 $A^\circ$

$$A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \varepsilon > 0\, [B(x,\varepsilon) \subset A]\}.$$

$a \in A^\circ$

$\Leftrightarrow a \in \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \varepsilon > 0\, [B(x,\varepsilon) \subset A]\}$

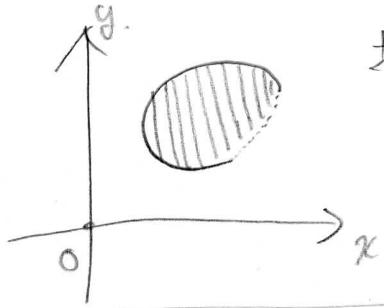
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, [B(a,\varepsilon) \subset A]$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\, [y \in B(a,\varepsilon) \Rightarrow y \in A]$

$\Rightarrow a \in A \quad (\because \forall \varepsilon > 0\, [a \in B(a,\varepsilon)])$

よって、

$A^\circ \subset A$.




左図のように
境界線の実線部は含まれ
点線部は含まれないような集合

or

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq 0\}$ とか…

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = A^c$ とすると、

$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2$, $A^\circ \cup B^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

であるから、$(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$. ▨

$A = \mathbb{Q}^2$, $B = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ とすると $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2$, $A^\circ = \emptyset$, $B^\circ = \emptyset$, $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$ とか…