

b) (i) V の基底 $\left(\begin{pmatrix} 100 \\ 000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 000 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 000 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 000 \\ 001 \end{pmatrix} \right)$

に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) $\text{Ker}(\phi)$:

V の単位元は $\begin{pmatrix} 000 \\ 000 \end{pmatrix} = 0$ である。

$$\text{Ker}(\phi) = \left\{ x \in V \mid \exists a, b, c, d, e, f \in R \left[x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(x) = 0 \right] \right\}$$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a+2d=0 & b+2e=0 & c+2f=0 \\ 3a+4d=0 & 3b+4e=0 & 3c+4f=0 \end{cases}$$

$$a=b=c=d=e=f=0$$

よって,

$$\text{Ker}(\phi) = \{0\}$$

(iii) $\text{Im}(\phi) = V$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in V \text{ に対して, } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in V$$

全射性がいえる。