4(1)

(a)

i). $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する

ϕ_1の表現行列は,

$$(1, x, x^2, x^3)\ A = (\phi_1(1), \phi_1(x), \phi_1(x^2), \phi_1(x^3))$$

$$= (0, x, 2x^2, 3x^3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ii). $\mathrm{Ker}\,\phi_1 = \{x \in \mathbb{R}[x]_3 \mid \phi_1(x) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}[x]_3 \mid Ax = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}[x]_3 \mid {}^{\exists}a \in \mathbb{R}\,[x = (a, 0, 0, 0)]\}$

$$\overset{Ax}{\parallel}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2c = 0 \\ 3d = 0 \end{cases}$$

iii) $\mathrm{Im}\,\phi_1 = \{(0, c_1x, c_2x^2, c_3x^3) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

ここが0になるのは↗の{ }のわくの中から明らか.

右辺の任意の元$(0, c_1x, c_2x^2, c_3x^3)$に対して,

$(0, c_1x, \frac{c_2}{2}x^2, \frac{c_3}{3}x^3) \in \mathbb{R}[x]_3$を対応させれば,

$\mathbb{R}[x]_3 \to$(右辺)の全射性がわかる.