線形代数 2010 中間試験（岡)

(1) 次の行列の行列式を求めよ。(10)

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{bmatrix}$$

解：

$$\det \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -d \\ 0 & b & 0 & -d \\ 0 & 0 & c & -d \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} b & 0 & -d \\ 0 & c & -d \\ 1 & 1 & 1+d \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \\ b & 0 & -d \\ 0 & c & -d \end{bmatrix} = a(bc(1+d)+bd)+bcd$$

$$= abcd + bcd + acd + abd + abc$$

(2) (a) 次の行列の行列式を求めよ。(10)

$$A = \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ANS: $\det A = t^4 - a_3t^3 - a_2t^2 - a_1t - a_0$, $\det B = 1$.

(b)

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。A の特性多項式を求めよ。(7) (a) の計算を使うと $\varphi(t) = t^4 - 5t^2 + 4 = (t-1)(t-4)$. 各こ固有空間は

$$W(A;1) =< {}^t(1,1,1,1) >, W(A;-1) =< {}^t(-1,1,-1,1) >,$$
$$W(A;2) =< {}^t(1,2,4,8) >, W(A;-2) =< {}^t(1,-2,4,-8)$$

(c) A^n を求めよ。(3)

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$C := B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ -2/3 & 2/3 & 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CAB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} C$$

以下省略

(3) $V = P_3(x)$ (次数 3 以下のの多項式) の空間とする。

- V の次元を求め、基底をひとつあげよ。(4)
  例えば (x_1, x_2, x_3, x_4), $x_1 = 1, x_2 = x, x_3 = x^2, x_4 = x^3$
- 線型写像 $\varphi : V \to V$ を

$$\varphi(f(x)) = f'(x) + f(x), \quad f \in V$$

  で定義する。 φ の上の基底に関して表現行列を求めよ。(3)

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- φ の固有値と固有ベクトルを求めよ。(3)
  こゆうちは 1 のみ（4 じゅうこん）$W(\varphi; 1) =< {}^t(1, 0, 0, 0) >$.

(4) $V = \mathbb{R}^3$ としユークリッド内積を (v, w) で表す。$\mathbf{y} = {}^t(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ を考え、線型写像

$$\psi : V \to V, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}$$

を考える。

(a) $\psi \circ \psi = \psi$ を示せ。(5)

$$\psi(\psi(\mathbf{x})) = \psi(\mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y})$$
$$= \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y} - ((\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{y})\mathbf{y} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}$$

(b) ψ の固有値 1 の固有ベクトルの空間 $W(\psi; 1)$ を求めよ。(5)
目のこで $\mathbf{y}$ に直交する 2 次元平面で生成元は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

または表現行列

$$(\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

から計算してもいい。