科目名	解析学 1/微分積分学 (2 回目)	対象	1S-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科	数学科	学籍 番号		評点
平成 17 年 7 月 26 日 (火)　2 回目 (～ 時限目)				担当	宮島 静雄	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注意 事項	①. 下記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~							

1 一変数実数値関数 $f(x)$ について,

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ということの正確な定義を述べよ.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ということの正確な定義を述べよ.

2

(i) Cauchy の平均値定理を正確に述べよ.

(ii) $a, b > 0$ として $\lim_{x\to+0} \dfrac{a^x - 1}{b^x - 1}$ を求めよ.

3 $f(x)$ は $[0,1]$ で連続, $(0,1)$ で微分可能な関数で $f(0) = f(1) = 0$ とする. このとき, ある $\xi \in (0,1)$ で $f'(\xi) = 2f(\xi)$ となることを証明せよ.

(ヒント：適当な関数 $g(x)$ を考え, $f(x)g(x)$ に Rolle の定理を使え)

4

(i) $u(x)$, $v(x)$ の積 uv の n 階導関数についての Leibniz の微分法則を述べよ.

(ii) $x^2 e^x$ の n 階導関数を求めよ ($n \geq 2$).

5 実数全体で定義された無限回微分可能な関数 f の, a を中心とする Taylor 級数とは何か説明せよ. またこの級数ともとの関数 f との関係について説明せよ.

6 $\log(1 + e^x)$ の 0 を中心とする 2 次の Taylor 近似多項式を求めよ. またその近似多項式と $\log(1 + e^x)$ の誤差を $0 \leq x < 0.1$ において評価せよ.

7 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界とし, $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{I_i\}_{i=1}^n$ と $|I_i|$ の意味は既知として, 次の問に答えよ.

(i) 分割 Δ に関する過剰和 $S(f,\Delta)$ と不足和 $s(f,\Delta)$ の定義を述べよ.

(ii) f が $[a,b]$ 上で積分可能ということの定義を述べよ.

(iii) この積分の定義はどのような考え方のもとに導入されたのか説明せよ.

8

(i) $\dfrac{x^8 + x^2 + 1}{x^2(x-1)^2(x^2+1)^2}$ を部分分数展開したときの形がどのようになるか述べよ.

(係数を実際に求める必要はなく, A, B, C などの記号で表せ.)

(ii) $\dfrac{1}{4x^4 + 1}$ の不定積分を求めよ.

9 次の不定積分についての問に答えよ.

(i) $R(s,t)$ を s, t の有理式とするとき, $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ を有理関数の不定積分に帰着させる方法を述べよ.

(ii) $\int \sqrt[3]{1+x}\,dx$ を求めよ (最終形は x の式で表すこと).