微分積分学

1. (1) 実数の切断の定義を述べよ.

   (2) 連続性の公理を述べよ.

   (3) 上界, 上限, 上に有界の定義を述べよ.

   (4) 上限の存在に関する命題を述べ, 証明せよ.

   (5) 上界を特徴付ける命題を述べ, 証明せよ.

   (6) $\sup -A = -\inf A$ を示せ.

   (7) $a, b \in \mathbf{R}$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して $a < b+\epsilon$ を満たしていれば, $a \leq b$ を示せ.

   (8) Archimedes の原理の主張を述べ, 証明せよ.

   (9) 有理数の稠密性の主張を述べ, 証明せよ.

2. (1) 数列の収束, 極限の定義を述べよ.

   (2) 極限の一意性を示せ.

   (3) 数列の有界の定義を述べよ.

   (4) 収束数列は有界であることを示せ.

   (5) 数列の収束の四則演算/順序に関する命題を述べ, 証明せよ.

3. (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を定義に従って示せ.

   (2) 数列の収束を用いた, 上限を特徴付ける命題を述べ, 示せ.

   (3) 単調増加数列の定義を述べよ.

   (4) 有界単調数列の収束に関する命題を述べ, 示せ.

   (5) 区間縮小法の主張を述べ, 示せ.

   (6) 部分列の定義を述べよ.

   (7) a に収束する数列の任意の部分列も a に収束することを示せ.

   (8) Bolzano-Weierstrass の定理を述べ, 示せ.

   (9) Cauchy 列の定義を述べよ.

   (10) Cauchy 列は有界であることを示せ.

   (11) Cauchy 列のある部分列が a に収束すれば, 元の数列自身も a に収束することを示せ.

   (12) 収束列が Cauchy 列と同値であることを示せ.

   (13) 正項級数, 絶対収束の定義を述べよ.

   (14) 正項級数の収束の必要条件を述べ, 示せ.

   (15) 級数の絶対収束と収束に関する命題を述べ, 示せ.

4. (1) 実数の公理系をすべて述べよ.

   (2) 絶対値の定義を述べよ.

   (3) 集合が帰納的であることの定義を述べよ.

   (4) いくつかの帰納的集合の共通部分は帰納的集合であることを示せ.

   (5) 自然数の定義を述べよ.

   (6) 数学的帰納法を正当化する命題を述べ, 示せ.

   (7) 自然数が間隔 1 でとびとびに存在することの命題を述べ, 示せ.

   (8) 自然数全体の空でない任意の部分集合が最小の元を持つことを示せ.

5. (1) 点列を用いた連続性の定義を述べよ.

   (2) 関数の連続性と四則演算に関する命題を述べよ. 証明は不要.

   (3) 関数 f が有界であることの定義を述べよ.

   (4) Weierstrass の最大値定理を述べ, 示せ.

   (5) 中間値の定理を述べ, 示せ.

   (6) n 乗根の存在を示せ.

   (7) 不動点定理を述べ, 示せ.

   (8) 合成関数の連続性に関する命題を述べよ. 証明は不要.

   (9) 関数の単調性の定義を述べよ.

   (10) 逆関数の連続性に関する命題を述べ, 示せ.

6. (1) $\epsilon-\delta$ 式の連続性の定義を述べよ.

   (2) $\epsilon-\delta$ 式の定義と点列的な定義の同値性を示せ.

   (3) 関数の連続性と四則演算に関する命題を $\epsilon-\delta$ 式に示せ.

   (4) f が a で連続ならば, f は a のある近傍で ~~連続~~ 有界であることを示せ.

   (5) 合成関数の連続性を $\epsilon-\delta$ 式定義に基づいて証明せよ.

   (6) 逆関数の連続性を $\epsilon-\delta$ 式定義に基づいて証明せよ.

   (7) 一様連続性の定義を述べよ.

   (8) 一様連続と連続の関係について述べ, 示せ.